UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2017-1
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 14/07/2017
DACBHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Sea el sistema de ecuaciones no lineales:

$$4x^2-9y^2-16x-18y-29=0$$
$$x^2-6x+y^2-4y-36=0$$

a) (1.0 P) Bosquejar a mano alzada la solución del sistema y localice las raíces a partir del gráfico, indicando valores cercanos a la raíces redondeados al entero.

b) (2.5 P) Determine la raíz ubicada en el tercer cuadrante usando 3 iteraciones del algoritmo de Newton-Raphson para sistemas y muestre el error de cada iteración.

c) (1.5 P) Escriba un programa en MATLAB que evalué la condición de convergencia para el método del Punto Fijo. De ser convergente deberá realizar iteraciones del método del punto fijo hasta tener una precisión de 1e-14, en caso contrario mostrar un mensaje de error.

Problema 2

Las masas $m_1\ y\ m_2$ están fijados a una varilla sin masa a distancia equidistante (l), como se observa en la Fig. 1. El sistema tiene un grado de libertad, el cuál se indica con el ángulo φ . La velocidad angular en el tiempo t=0 seg. es cero ($\dot{\varphi}(0)=0$).

En los tiempos t_1, t_2 y t_3 se midieron los siguientes ángulos:

$t_1 = 0\ seg.$	$t_2 = 1\ seg.$	$t_3 = 2\ seg.$
$\varphi_1 = 0.785$	$\varphi_1 = 0.524$	$\varphi_1 = 0.087$

a) (1.0 P) Construya un polinomio interpolante que pasa por estos puntos, usando la técnica de Lagrange.

b) (1.0 P) Estime el valor del ángulo en los tiempos t_a=1.5 y t_b=8.

c) (1.0 P) ¿Es el ángulo en el punto t_b realista? Justifique.

d) (1.0 P) Determine los trazadores cúbicos (Spline Natural) y aproxime el ángulo en t_b=8.¿Para este caso es mejor el Spline Natural? Justifique.

e) (1.0 P) ¿Cuáles son los comandos en MATLAB para obtener el Spline natural y los coeficientes correspondientes?

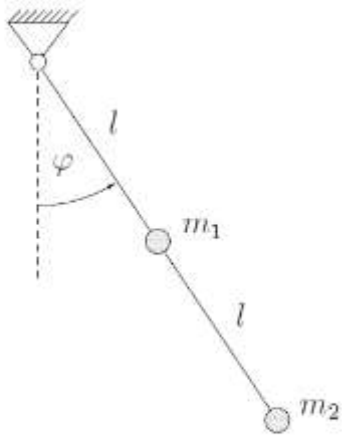


Fig 1 Péndulo con dos masas equidistantes

Problema 3

Dada la siguiente tabla

v (m/s)	0	1,0	1,8	2,4	3,5	4,4	5,1	6,0
P (kW)	0	4,7	12,2	19,0	31,8	40,1	43,8	43,2

Se observa que la potencia suministrada a las ruedas motrices de un automóvil como una función de la velocidad v. Si la masa del automóvil es m=2000 kg,

a) **(2.5 P)** Utilizando el método del trapecio simple para cada par de puntos, aproxime el tiempo Δt que se tarda el automóvil para acelerar de 1 m/s a 6 m/s. Trabaje con 4 lugares decimales.

b) **(2.5 P)** Escriba un programa en MATLAB para la parte a).

Indicación: De la Segunda Ley de Newton $F = m\left(\frac{dv}{dt}\right)$ y de la definición de potencia $P = Fv$

obtenemos : $\Delta t = m\int_{v_1}^{v_2}\left(\frac{v}{P}\right)dv$

Problema 4

Una varilla de acero se calienta hasta 800°C y luego se deja enfriar al medio ambiente la cual se encuentra a 20°C, si se sabe que el modelo matemático correspondiente es representado por la ley de enfriamiento de Newton, la cual es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Ta)$$

donde Ta, es la temperatura ambiente en °C y k es la constante de enfriamiento en s^{-1}.

a) **(1.0 P)** Si después de 30 segundos la temperatura se reduce a 500°C, calcule k con 4 decimales, resolviendo la EDO analíticamente.

b) **(2.5 P)** Usando el método de Taylor de orden 2, estime la temperatura en el instante t=4 segundos considerando un paso de 2 segundos.

c) **(1.5 P)** Usando el método numérico anterior, desarrolle un script en MATLAB, que permita graficar la curva T vs t en los primeros 5 minutos, considerando un paso de $\mathbf{10^{-2}}$.

Los Profesores

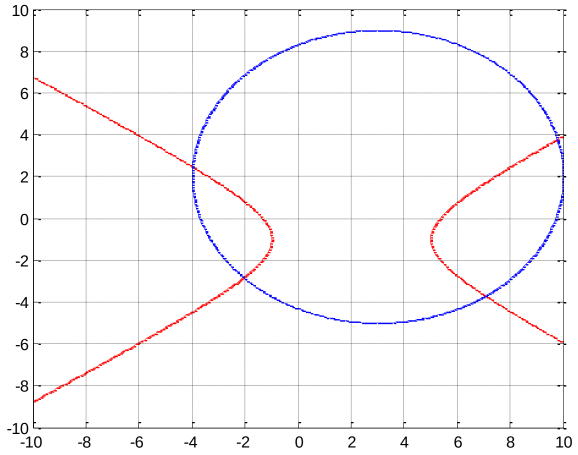
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
DACBHCC

P.A. 2017-1
14/07/2017

Solucionario

Problema 1

a) Bosquejando el circulo y la hipérbola:




```
% Aproximaciones iniciales: (-4,2) (-2,-3) (10,4) (7,-4)
```

b)

$$X^0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 8x-16 & -18y-18 \\ 2x-16 & 2y-4 \end{bmatrix}$$

$$F = -\begin{bmatrix} 4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 \\ x^2 - 6x + y^2 - 4y - 36; \end{bmatrix}$$

$$X^{N+1} = X^N + J^{-1}F$$

x	y	err
-2.000000000000000	-3.000000000000000	NaN
-2.064705882352941	-2.835294117647059	0.164705882352941
-2.066500143894941	-2.830176570331311	0.005117547315748
-2.066501970455001	-2.830171610140113	0.000004960191198

c)

```
% Convergencia punto fijo
syms x y
G1=(4*x^2-9*y^2-18*y-29)/16
G2=(x^2-6*x+y^2-36)/4
J=[diff(G1,x) diff(G1,y);diff(G2,x) diff(G2,y) ]
x0=-2; y0=-3;
JJ=subs(J,{x,y},{x0,y0}); m=norm(JJ,Inf)
if m<1
   for i=1:1000
        x1=subs(G1,{x,y},{x0,y0})
        y1=subs(G2,{x,y},{x0,y0})
        err=norm([x1-x0;y1-y0],Inf);
        x0=x1; y0=y1;
   end
```

```
else
   disp('Habra divergencia!!!')
end
```

Problema 2

a)

$$P_2(t) = \varphi_1 \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + \varphi_2 \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + \varphi_3 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$
$$= \frac{0,785}{2}(t-1)(t-2) - 0,524\,t\,(t-2) + \frac{0,087}{2}t\,(t-1)$$

b)

$$P_2(t_a) = 0,3925\,(1,5\ -1)(1,5\ -2) - 0,524\cdot 1,5\ \ (1,5\ -2)$$
$$+ 0,0435\cdot 1,5\ \ (1,5\ -1)$$
$$= 0,3275$$
$$P_2(t_b) = 0,3925\,(8-1)(8-2) - 0,524\cdot 8\,(8-2) + 0,0435\cdot 8\,(8-1)$$
$$= -6,231$$

c) No, debido a que el máximo valor que puede tomar es ± 0.785.

d) $\varphi[t_0,t_1] = -0.2610$, $\varphi[t_1,t_2] = -0.430$,$h_1 = h_2 = 1$ $\Delta = \varphi[t_1,t_2] - \varphi[t_0,t_1]$=-01760

Spline Natural: $M_0 = M_2 = 0$

$h_0 M_0 + 2(h_0 + h_1)M_1 + h_1 M_2 = 6\Delta$ ➔ $M_1 = -0.2640$

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i} \qquad b_i = \frac{M_i}{2} \qquad c_i = y[x_i x_{i+1}] - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} h_i \qquad d_i = y_i$$

$$a_0 = -0.044 \qquad b_0 = 0 \qquad c_0 = -0.2170 \qquad d_0 = 0.7850$$

$$a_1 = 0.044 \qquad b_1 = -0.1320 \qquad c_1 = -0.3490 \qquad d_1 = 0.5240$$

$$S(t) = \begin{cases} s_0(t) = -0.044(t-0)^3 - 0.2170(t-0) + 0.785 & t \in [0,\ \ 1] \\ s_1(x) = 0.044(t-1)^3 - 0.132(t-1)^2 - 0.3490(t-1) + 0.524 & t \in [1,\ \ 2] \end{cases}$$

$$s_1(8) = 6.7050$$

Sale parecido que al usar el polinomio de interpolación, en ambos casos falla el método debido a que es una extrapolación y para resolver este problema se debería tomar más datos cercanos al valor pedido.

e). Obtenemos A= $s'_0(0) = -0.217$ y B= $s'_1(2) = -0.481$

```
>>    t=[0 1 2]   ;   y=[0.785, 0.524, 0.087]
>> s=spline(t,[A y B])
>> c=s.coefs
```

Problema 3

a)

v (m/s)	0	1,0	1,8	2,4	3,5	4,4	5,1	6,0
P (kW)	0	4,7	12,2	19,0	31,8	40,1	43,8	43,2
$\frac{v}{P}$		0.2128	0.1475	0.1263	0.1101	0.1097	0.1164	0.1389

$$\boldsymbol{\Delta t = m\int_1^6 \left(\frac{v}{P}\right)dv = m\int_1^{1,8}\left(\frac{v}{P}\right)dv + m\int_{1,8}^{2,4}\left(\frac{v}{P}\right)dv + m\int_{2,4}^{3,5}\left(\frac{v}{P}\right)dv + m\int_{3,5}^{4,4}\left(\frac{v}{P}\right)dv + m\int_{4,4}^{5,1}\left(\frac{v}{P}\right)dv + m\int_{5,1}^{6}\left(\frac{v}{P}\right)dv}$$

$$\boldsymbol{\Delta t = m\int_1^6 \left(\frac{v}{P}\right)dv \approx 2000\left[\frac{0,8}{2}\times(0,2128+0,1475)+\frac{0,6}{2}\times(0,1475+0,1263)+\frac{1,1}{2}\times(0,1263+0,1101)+\frac{0,9}{2}\times(0,1101+0,1097)+\frac{0,7}{2}\times(0,1097+0,1164)+\frac{0,9}{2}\times(0,1164+0,1389)\right]10^{-3} = 2\times 0.6492 = 1,2985\ s}$$

b)

```
clc
v=[1 1.8 2.4 3.5 4.4 5.1 6.0]
P=[4.7 12.2 19.0 31.8 40.1 43.8 43.2]*10^3  % watts
G=2000*v./P
dv=diff(v)
I=0
for k=1:length(dv)
    I=I+(dv(k)/2)*(G(k)+G(k+1));
end
I
```

Problema 4

a)

$$\int_{To}^{T}\frac{dT}{T-Ta} = \int_0^t k dt$$

$$Ln(T-Ta) - Ln(To-Ta) = kt$$

Reemplazando:

$$Ln(500-20) - Ln(800-20) = k.30$$

k= -0.0162

b)

$$T' = k(T - Ta) = f(t,T)$$

$$f'(t,T) = kT' = k^2(T - Ta)$$

Tomando la siguiente formula de Taylor:

$$\boxed{y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2} f'(t_j, y_j)}$$

$$T_{k+1} = T_k + hk(T - Ta) + \frac{h^2}{\mathbf{2}} k^2(T - Ta)$$

$T(2) = T(0) + 2 * k * (T(0) - 20) + 2 * k^2 * (T(0) - 20) = 775.1374$

$T(4) = T(2) + 2 * k * (T(2) - 20) + 2 * k^2 * (T(2) - 20) = 751.0673$

c)

```
T=800
vecT=T
h=10^-2
for t=0:h:(300-h)
T=T+h*k*(T-20)+(h^2/2)*k^2*(T-20)
vecT=[vecT;T];
end
plot(0:h:300,vecT)
```

Los Profesores